PART2　余りによる分類，合同式

2　n を整数とする。次のことを証明せよ。

(1)　n^2+7n+4 は偶数である。

(2)　n^2+1 は 3 の倍数ではない。

Point Pickup

k を整数とするとき，すべての整数は，正の整数 m で割ったときの余りで

mk，$mk+1$，$mk+2$，……，$mk+(m-1)$

の m 通りに分類できる。

a，b を整数，m を自然数とするとき，$a-b$ が m の倍数である，すなわち a を m で割った余りと b を m で割った余りが等しいことを，a と b は m を「法」として「合同」であるといい

$a \equiv b \pmod{m}$

と表す。このような式を「合同式」という。

$a \equiv b \pmod{m}$，$c \equiv d \pmod{m}$　(a，b，c，d を整数，m を自然数)とするとき

$a+c \equiv b+d \pmod{m}$　　$a-c \equiv b-d \pmod{m}$

$ac \equiv bd \pmod{m}$　　$a^n \equiv b^n \pmod{m}$　ただし，n は自然数

第 8 講　PART2　確認問題

n を整数とする。次のことを証明せよ。

空欄には最も適切な値を答えよ。

1　$3n^2+9n+5$ は奇数である。

（証明）

すべての整数 n は，[ア]k，[ア]$k+$[イ]（k は整数）の

いずれかで表される。

$n=$[ア]k のとき

$3n^2+9n+5=$[ウ]([エ]k^2+9k+[オ]$)+$[カ]

$n=$[ア]$k+$[イ] のとき

$3n^2+9n+5=$[キ]([ク]k^2+15k+[ケ]$)+$[コ]

よって，$3n^2+9n+5$ は奇数である。

2　$2n^2+n+1$ は 3 の倍数ではない。

（証明）

すべての整数 n は，$\boxed{サ}k$，$\boxed{サ}k+\boxed{シ}$，$\boxed{サ}k+\boxed{ス}$

（k は整数）のいずれかで表される。ただし，$\boxed{シ}<\boxed{ス}$

とする。

$n=\boxed{サ}k$ のとき

$$2n^2+n+1=\boxed{セ}(\boxed{ソ}k^2+k)+\boxed{タ}$$

$n=\boxed{サ}k+\boxed{シ}$ のとき

$$2n^2+n+1=\boxed{セ}(\boxed{ソ}k^2+5k+\boxed{チ})+\boxed{ツ}$$

$n=\boxed{サ}k+\boxed{ス}$ のとき

$$2n^2+n+1=\boxed{セ}(\boxed{ソ}k^2+9k+\boxed{テ})+\boxed{ト}$$

よって，$2n^2+n+1$ は 3 の倍数ではない。

[MEMO]

PART2　余りによる分類，合同式

2　n を整数とする。次のことを証明せよ。

(1)　n^2+7n+4 は偶数である。

(2)　n^2+1 は 3 の倍数ではない。

(1)　すべての整数 n は，$2k$，$2k+1$ (k は整数) のいずれかで表される。

$n=2k$ のとき

$$n^2+7n+4=(2k)^2+7\cdot 2k+4=4k^2+14k+4=2(2k^2+7k+2)$$

$n=2k+1$ のとき

$$n^2+7n+4=(2k+1)^2+7(2k+1)+4=4k^2+18k+12=2(2k^2+9k+6)$$

よって，n^2+7n+4 は偶数である。

(2)　すべての整数 n は，$3k$，$3k+1$，$3k+2$ (k は整数) のいずれかで表される。

$n=3k$ のとき

$$n^2+1=(3k)^2+1=3\cdot 3k^2+1$$

$n=3k+1$ のとき

$$n^2+1=(3k+1)^2+1=9k^2+6k+2=3(3k^2+2k)+2$$

$n=3k+2$ のとき

$$n^2+1=(3k+2)^2+1=9k^2+12k+5=3(3k^2+4k+1)+2$$

よって，n^2+1 を 3 で割った余りは 1 または 2 であり，n^2+1 は 3 の倍数ではない。

(別解)

(1)　$n\equiv 0 \pmod 2$ のとき

$$n^2+7n+4\equiv 0^2+7\cdot 0+4\equiv 4\equiv 0 \pmod 2$$

$n\equiv 1 \pmod 2$ のとき

$$n^2+7n+4\equiv 1^2+7\cdot 1+4\equiv 12\equiv 0 \pmod 2$$

よって，n^2+7n+4 は偶数である。

(2)　$n\equiv 0 \pmod 3$ のとき

$$n^2+1\equiv 0^2+1\equiv 1 \pmod 3$$

$n\equiv 1 \pmod 3$ のとき

$$n^2+1\equiv 1^2+1\equiv 2 \pmod 3$$

$n\equiv 2 \pmod 3$ のとき

$$n^2+1\equiv 2^2+1\equiv 5\equiv 2 \pmod 3$$

よって，n^2+1 を 3 で割った余りは 1 か 2 であり，n^2+1 は 3 の倍数ではない。

第 8 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：1，ウ：2，エ：6，オ：2，
カ：1，キ：2，ク：6，ケ：8，コ：1

[解説]

すべての整数 n は，$2k$，$2k+1$（k は整数）のいずれかで表される。 [A]

$n=2k$ のとき

$$\begin{aligned}3n^2+9n+5&=3(2k)^2+9\cdot 2k+5\\&=12k^2+18k+5\\&=\mathbf{2}(6k^2+9k+\mathbf{2})+\mathbf{1}\end{aligned}$$

$n=2k+1$ のとき

$$\begin{aligned}3n^2+9n+5&=3(2k+1)^2+9(2k+1)+5\\&=12k^2+30k+17\\&=\mathbf{2}(6k^2+15k+8)+\mathbf{1}\end{aligned}$$

よって，$3n^2+9n+5$ は奇数である。

（別解）

$n\equiv 0 \pmod 2$ のとき [B]

$$3n^2+9n+5\equiv 3\cdot 0^2+9\cdot 0+5\equiv 5\equiv 1$$

$n\equiv 1 \pmod 2$ のとき

$$3n^2+9n+5\equiv 3\cdot 1^2+9\cdot 1+5\equiv 17\equiv 1$$

よって，$3n^2+9n+5$ は奇数である。

［A］　k を整数とするとき，すべての整数は，正の整数 m で割ったときの余りで
mk，$mk+1$，$mk+2$，……，
$mk+(m-1)$
の m 通りに分類できる。

［B］　a，b を整数，m を自然数とするとき，$a-b$ が m の倍数である，すなわち a を m で割った余りと b を m で割った余りが等しいことを，a と b は m を「法」として「合同」であるといい，
$a\equiv b \pmod m$
と表す。このような式を「合同式」という。
$a\equiv b \pmod m$，$c\equiv d \pmod m$
（a，b，c，d は整数，m は自然数）
とするとき
$a+c\equiv b+d \pmod m$
$a-c\equiv b-d \pmod m$
$ac\equiv bd \pmod m$
$a^n\equiv b^n \pmod m$
（ただし，n は自然数）

2 **[正解]** サ：3，シ：1，ス：2，セ：3，ソ：6，
タ：1，チ：1，ツ：1，テ：3，ト：2

[解説]

すべての整数 n は，$3k$，$3k+1$，$3k+2$（k は整数）のいずれかで表される。 [A]

$n=3k$ のとき

$$2n^2+n+1=2(3k)^2+3k+1$$
$$=18k^2+3k+1$$
$$=3(6k^2+k)+1$$

$n=3k+1$ のとき

$$2n^2+n+1=2(3k+1)^2+(3k+1)+1$$
$$=18k^2+15k+4$$
$$=3(6k^2+5k+1)+1$$

$n=3k+2$ のとき

$$2n^2+n+1=2(3k+2)^2+(3k+2)+1$$
$$=18k^2+27k+11$$
$$=3(6k^2+9k+3)+2$$

よって，$2n^2+n+1$ を 3 で割った余りは 1 または 2 であり，$2n^2+n+1$ は 3 の倍数ではない。

（別解）

$n\equiv 0 \pmod 3$ のとき [B]

$$2n^2+n+1\equiv 2\cdot 0^2+0+1\equiv 1$$

$n\equiv 1 \pmod 3$ のとき

$$2n^2+n+1\equiv 2\cdot 1^2+1+1\equiv 4\equiv 1$$

$n\equiv 2 \pmod 3$ のとき

$$2n^2+n+1\equiv 2\cdot 2^2+2+1\equiv 11\equiv 2$$

よって，$2n^2+n+1$ を 3 で割った余りは 1 または 2 であり，$2n^2+n+1$ は 3 の倍数ではない。